

OPCIÓN A

A.1.- Cuando el año 1800 Beethoven escribe su Primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su Primera Sinfonía. Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos históricos-musicales del examinando

Llamando **B** a la edad de Beethoven en 1800 y **S** a la de Schubert ese año y suponiendo que transcurrió un tiempo **T** entre la Primera Sinfonía de Beethoven y la Sinfonía Inacabada de Schubert

$$\begin{cases} B = 10S \\ B + T + S + T = 77 \\ S + T + 5 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B - 10S = 0 \\ B + S + 2T = 77 \\ B - S - T = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 77 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 9 & -1 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 99 & -11 & 55 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 77 \\ 0 & 0 & -29 & -638 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow -29T = -638 \Rightarrow T = \frac{-638}{-29} = 22 \text{ años} \Rightarrow 11S + 2 \cdot 22 = 77 \Rightarrow 11S = 77 - 44 \Rightarrow 11S = 33 \Rightarrow$$

$$S = 3 \text{ años en 1800} \Rightarrow B = 10 \cdot 3 = 30 \text{ años} \Rightarrow \begin{cases} \text{Beethoven nació en } 1800 - 30 = 1770 \\ \text{Schubert nació en } 1800 - 3 = 1797 \end{cases}$$

A.2.- Sean los puntos **A(2, 3, 0)** y **B(-2, 1, 4)**

a) Ecuación del plano π mediatriz del segmento **AB**

b) El volumen del tetraedro formado por π y los tres planos coordenados

c) Ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el origen.

Nota: El plano mediatriz de un segmento es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio

a) El vector director del plano π es el vector, perpendicular a él, **AB** y el formado por el punto medio **C** del vector con el punto genérico **G** del plano, un vector perpendicular al director, y por lo tanto el producto escalar, de estos vectores, nulo que es la ecuación del plano.

$$\begin{cases} x_C = \frac{2+(-2)}{2} = 0 \\ y_C = \frac{3+1}{2} = 2 \\ z_C = \frac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow C(0, 2, 2) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 4) - (2, 3, 0) = (-4, -2, 4) \equiv (2, 1, -2) \\ \overrightarrow{CG} = (x, y, z) - (0, 2, 2) = (x, y-2, z-2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \Rightarrow (2, 1, -2) \cdot (x, y-2, z-2) = 0 \Rightarrow 2x + y - 2 - 2(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y - 2z + 2 = 0$$

b) Se calcularán los puntos de corte **D**, **E** y **F** del plano con los ejes coordenados, hallándose el volumen del tetraedro formado por ellos y el origen de coordenadas

$$\text{Con } OX \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda + 0 - 2 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow C \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-1, 0, 0)$$

$$\text{Con } OY \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + \mu - 2 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow \mu + 2 = 0 \Rightarrow \mu = -2 \Rightarrow D \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0, -2, 0)$$

$$\text{Con } OZ \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot \alpha + 2 = 0 \Rightarrow -2\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow E \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow E(0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} = (-1, 0, 0) - (0, 0, 0) = (-1, 0, 0) \\ \overrightarrow{OD} = (0, -2, 0) - (0, 0, 0) = (0, -2, 0) \\ \overrightarrow{OE} = (0, 0, 1) - (0, 0, 0) = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE}) \right| \Rightarrow$$

$$\left| \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE}) \right| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = |2| = 2 \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} u^3$$

c)

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (2, 1, -2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\eta = 2\eta \\ y = 0 + \eta = \eta \\ z = 0 - 2\eta = -2\eta \end{cases}$$

A.3.- Tenemos que hacer dos chapas cuadradas de dos distintos materiales. Los dos materiales tienen precios respectivamente de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado. ¿Cómo hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser de un metro?

Sean cuadrados de **a** y **b** cm. de lado, respectivamente

$$\begin{cases} 100 = 4a + 4b \Rightarrow 25 = a + b \Rightarrow b = 25 - a \\ P = 2.a^2 + 3.b^2 \Rightarrow P = 2.a^2 + 3.(25 - a)^2 \Rightarrow P = 2.a^2 + 3.(625 - 50.a + a^2) \Rightarrow P = 5.a^2 - 150a + 1875 \end{cases}$$

$$P' = \frac{dP}{da} = 10a - 150 = 10.(a - 15) \Rightarrow P' = \frac{dP}{da} = 0 \Rightarrow 10.(a - 15) = 0 \Rightarrow a - 15 = 0 \Rightarrow a = 15 \text{ cm}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{da^2} = 10 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} a = 15 \text{ cm} \\ b = 25 - 15 = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

A.4.- Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$

$$\begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow m = \frac{e^{-1} - e}{1 - (-1)} = \frac{\frac{1}{e} - e}{2} = \frac{e^2 - 1}{2e} \Rightarrow y - e = \frac{e^2 - 1}{2e} \cdot (x - 1) \Rightarrow \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = e^1 = e \end{cases}$$

$$y = \frac{e^2 - 1}{2e}x + e - \frac{e^2 - 1}{2e} \Rightarrow y = \frac{e^2 - 1}{2e}x + \frac{2e^2 - e^2 + 1}{2e} \Rightarrow y = \frac{e^2 - 1}{2e}x + \frac{e^2 + 1}{2e} \Rightarrow g(x) = \frac{e^2 - 1}{2e}x + \frac{e^2 + 1}{2e}$$

$$\begin{cases} g(0) = \frac{e^2 - 1}{2e} \cdot 0 + \frac{e^2 + 1}{2e} = \frac{e^2 + 1}{2e} \Rightarrow \frac{e^2 + 1}{2e} > 1 \Rightarrow g(x) > f(x) \text{ para } x \in [-1, 1] \Rightarrow \\ f(0) = e^0 = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^1 \left(\frac{e^2 - 1}{2e}x + \frac{e^2 + 1}{2e} \right) dx - \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{e^2 - 1}{2e} \int_{-1}^1 x dx + \frac{e^2 + 1}{2e} \int_{-1}^1 dx - [e^x]_{-1}^1$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 - 1}{2e} \cdot [x^2]_{-1}^1 + \frac{e^2 + 1}{2e} \cdot [x]_{-1}^1 - (e^1 - e^{-1}) = \frac{e^2 - 1}{4e} \cdot [1^2 - (-1)^2] + \frac{e^2 + 1}{2e} \cdot [1 - (-1)] - \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

$$A = \frac{e^2 - 1}{4e} \cdot (1 - 1) + \frac{e^2 + 1}{2e} \cdot (1 + 1) - \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{4e} \cdot 0 + \frac{e^2 + 1}{e} - \frac{e^2 - 1}{e} = \frac{e^2 + 1 - e^2 + 1}{e} = \frac{2}{e} u^2$$

OPCIÓN B

B.1. Sea el sistema
$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ ax + 2z = 0 \\ ay + z = a \end{cases}$$

a) Clasificarlo según los valores del parámetro **a**

b) Resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a - 3a = a^2 - 5a = (a-5)a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (a-5)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 5\} = \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indet er min ado}$$

Si $a = 5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -3 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & -25 \end{array} \right) \Rightarrow \text{Sist. Incompatible}$$

b)

Hemos demostrado que para $a = 0$ el sistema es Compatible Indet er min ado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x + 3y + 0 = 5 \Rightarrow x = -3y + 5 \Rightarrow \text{Solución}(-3\lambda + 5, \lambda, 0)$$

B.2. Sea el plano $\pi : x - 5y + z + 3 = 0$ y las rectas $r : x - 3 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{3}$ y

$s : \frac{x + 1}{2} = y = z + 2$. Determinar

a) Los puntos de intersección del plano π con cada una de las dos rectas

b) El área y perímetro del triángulo formado por los dos puntos anteriores y el origen de coordenada

a)

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \Rightarrow 3 + \lambda - 5(2 + 2\lambda) + 4 + 3\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 10 + 4\lambda - 10 - 10\lambda = 0 \Rightarrow -6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

$$A : \begin{cases} x = 3 + 0 = 3 \\ y = 2 + 2 \cdot 0 = 2 \Rightarrow A(3, 2, 4) \\ z = 4 + 3 \cdot 0 = 4 \end{cases}$$

$$s : \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \Rightarrow -1 + 2\mu - 5\mu - 2 + \mu + 3 = 0 \Rightarrow -2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow B \\ z = -2 + \mu \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \Rightarrow B(-1, 0, -2) \\ z = -2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \vec{OA} = (3, 2, 4) - (0, 0, 0) = (3, 2, 4) \\ \vec{OB} = (-1, 0, -2) - (0, 0, 0) = (-1, 0, -2) \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA} \times \vec{OB}| \Rightarrow \vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ \vec{AB} = (-1, 0, -2) - (3, 2, 4) = (-4, -2, -6) \end{cases}$$

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + 6\vec{j} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{OA} \times \vec{OB}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \text{ u}^2$$

$$\text{Perímetro} = |\vec{OA}| + |\vec{OB}| + |\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} + \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-6)^2}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{56} = (\sqrt{29} + \sqrt{5} + 2\sqrt{14})u$$

B.3.- Sea la función $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Determinar:

a) El área encerrada entre su gráfica y el eje de abscisas entre los valores $x = 0$ y $x = 1$

b) El área encerrada entre la tangente en $x = \pi$ y los dos ejes coordenados

a)

$$A = \int_0^1 x \operatorname{sen} x \, dx = -[x \cos x]_0^1 - \int_0^1 (-\cos x) \, dx = -[1 \cos 1 - 0 \cos 0] + \int_0^1 \cos x \, dx = -(\cos 1 - 0 \cdot 1) + [\operatorname{sen} x]_0^1$$

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \operatorname{sen} x \, dx = dv \Rightarrow v = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \end{cases}$$

$$A = -\cos 1 + (\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0) = -\cos 1 + (\operatorname{sen} 1 - 0) = \operatorname{sen} 1 - \cos 1$$

b)

$$\begin{cases} f(\pi) = \pi \operatorname{sen} \pi = \pi \cdot 0 = 0 \\ f'(x) = \operatorname{sen} x + x \cos x \Rightarrow f'(\pi) = \operatorname{sen} \pi + \pi \cos \pi = 0 + \pi \cdot (-1) = -\pi \Rightarrow y = -\pi(x - \pi) \Rightarrow \end{cases}$$

$$y = -\pi x + \pi^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -\pi x + \pi^2 = 0 \Rightarrow \pi x = \pi^2 \Rightarrow x = \pi \Rightarrow A = \int_0^\pi (-\pi x + \pi^2) \, dx$$

$$A = -\pi \int_0^\pi x \, dx + \pi^2 \int_0^\pi dx = -\frac{\pi}{2} \cdot [x^2]_0^\pi + \pi^2 [x]_0^\pi = -\frac{\pi}{2} \cdot (\pi^2 - 0^2) + \pi^2 (\pi - 0) = -\frac{\pi^3}{2} + \pi^3 = \frac{\pi^3}{2} u^2$$

B.4.- Sea la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Determinar:

a) El máximo de la función en el intervalo $(0, \pi)$

b) Ecuación de las tangentes a la gráfica en los extremos del intervalo anterior

a)

$$f'(x) = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1) = \frac{3}{4}\pi$$

$$f''(x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x (\cos x - \operatorname{sen} x) = e^x (\cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 2e^x \cos x$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2e^{\frac{3}{4}\pi} \cos \frac{3}{4}\pi = 2e^{\frac{3}{4}\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = e^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen} \frac{3}{4}\pi = e^{\frac{3}{4}\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Máximo} \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3}{4}\pi} \right)$$

b)

$$\begin{cases} f(0) = e^0 \operatorname{sen} 0 = 1 \cdot 0 = 0 \\ m = f'(0) = e^0 (\operatorname{sen} 0 + \cos 0) = 1 \cdot (0 + 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x \Rightarrow y - x = 0$$

$$\begin{cases} f(\pi) = e^\pi \operatorname{sen} \pi = e^\pi \cdot 0 = 0 \\ m = f'(\pi) = e^\pi (\operatorname{sen} \pi + \cos \pi) = e^\pi \cdot [0 + (-1)] = -e^\pi \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -e^\pi(x - \pi) \Rightarrow y = -e^\pi x + \pi e^\pi$$